MATHÉMATIQUES 1

Durée : 4 heures

EXERCICE :

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de la variable complexe z, de rayon de convergence R, réel strictement positif. Pour tout z, élément du disque ouvert de convergence, on note f(z) la somme de cette série entière : $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

1 - Soit Z un élément du disque ouvert de convergence et r un réel tel que $|Z| < r < R$. Montrer que la quantité suivante est bien définie :

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{r.e^{it}.f(r.e^{it})}{r.e^{it} - Z}\, dt$$

2 - Montrer que la série à termes complexes $\sum_{n\geq 0} \frac{Z^n}{r^n}.e^{-int}$ converge pour tout réel t.

Exprimer sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^n}{r^n}.e^{-int}$ comme une fonction rationnelle de $\frac{Z\,e^{-it}}{r}$.

3 - Soit u_n l'application de l'ensemble des réels dans l'ensemble des complexes qui à t associe $\sum_{p=0}^{n} a_{n-p} \frac{r^{n-p}}{r^p}.e^{i(n-p)t}.e^{-ipt}.Z^p$

Déduire de ce qui précède que la série de fonction $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement, et que pour tout réel t, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = \frac{r.e^{it}.f(r.e^{it})}{r.e^{it} - Z}$.

4 - Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur l'ensemble des réels.

En déduire que I(r) = G. f(Z) où G est un réel à déterminer.

PROBLÈME :

Dans tout ce problème, les notations suivantes sont utilisées :

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels.
- $\mathbb{R}^2$ est, chaque fois que nécessaire, muni de sa structure euclidienne canonique orientée. Pour X = (x, y) éléments de $\mathbb{R}^2$, $\|X\|$ désigne la quantité $(x^2 + y^2)^{1/2}$.
  Pour $X_1 = (x_1, y_1)$ et $X_2 = (x_2, y_2)$ élément de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Det}(X_1, X_2)$ désigne la quantité $(x_1y_2 - y_1x_2)$.

- Pour toute application F d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$:
  $F : \Omega \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto F(x, y)$;

et pour tout Z élément de $\mathbb{R}^2$, gradF(Z) désigne $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(Z), \frac{\partial F}{\partial y}(Z)\right)$ (vecteur gradient de F au point Z).

- Pour tout x élément de IR, sgn(x) désigne le signe de x :

sgn(x) =1 si x>0, sgn(x) = -1 si x<0, sgn(0) = 0.

PREMIÈRE PARTIE : Systèmes à un degré de liberté

- Soient a et b des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$, tels que a < b. On désignera par I l'intervalle]a, b[.
- Soit U une application de I dans IR de classe $\mathcal{C}^3$ qui vérifie :
  - Il existe c élément de I tel que :

U' est strictement négatif sur]a, c[, strictement positif sur]c, b[(1)

  - U'(c) = 0, U''(c) > 0 (2)

- On désigne par (E) l'équation différentielle x'' = - U'(x)

- On admet le résultat suivant :

Pour tout couple (α, β) de I x IR, et tout réel t_0 il existe une unique solution φ de l'équation (E) définie sur IR **tout entier** qui vérifie $\varphi(t_0) = \alpha$, $\varphi'(t_0) = \beta$.

- On appelle **trajectoire** de (E) toute courbe de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \varphi'(t) \end{cases}$$

où $t \mapsto \varphi(t)$ est une solution de (E) définie sur IR, c'est-à-dire l'ensemble des éléments (x, y) de $\mathbb{R}^2$ tels qu'il existe t élément de IR tel que $x = \varphi(t)$, $y = \varphi'(t)$.

(L'équation (E) peut décrire l'évolution au cours du temps de la position définie par x d'une particule de masse unité soumise à une force -U' dérivant du potentiel U ; l'objet de cette partie est l'étude de la forme des trajectoires de l'équation et de ses solutions périodiques éventuelles.)

I - 1 - Conservation de l'énergie :

Soit l'application $\mathcal{E}$: $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2}.y^2 + U(x)$$

a - Soit φ une solution de (E). Montrer que l'application de IR dans IR qui à t associe $\mathcal{E}(\varphi(t), \varphi'(t))$ est constante.

(Conservation de la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\varphi'(t)^2$ et de l'énergie potentielle $U(\varphi(t))$.)

b - Soit k un élément de IR ; E_k désigne l'ensemble des éléments X de I x IR tels que $\mathcal{E}(X) = k$. Tout ensemble E_k est appelé **ligne de niveau** de $\mathcal{E}$. Montrer que toute trajectoire de (E) est incluse dans une ligne de niveau de $\mathcal{E}$.

2 - Un exemple : l'oscillateur harmonique

Dans cette question et seulement dans cette question on suppose que I = IR et que pour tout x élément de IR, $U(x) = \frac{1}{2} . \omega^2 . x^2$ où ω est un réel strictement positif.

a - Soit E_k une ligne de niveau de $\mathcal{E}$; pour quelles valeurs de k l'ensemble E_k est-il non vide ? Discuter alors suivant les valeurs de k sa nature géométrique, montrer notamment que pour certaines valeurs de k, E_k est une ellipse dont on précisera le centre et l'excentricité en fonction de k et ω.

b - Déterminer les solutions de (E) ; dans le cas où certaines seraient périodiques non constantes, donner leur plus petite période strictement positive.

c - Comparer les lignes de niveau de $\mathcal{E}$ et les trajectoires de (E).

- Cas général : Soit l'application w : $I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \text{sgn}(x - c)\sqrt{2(U(x) - U(c))}$

a - Montrer qu'il existe ℓ et ℓ' éléments de $]U(c), +\infty[$ tels que $\lim_{x \to a} U(x) = \ell$ et $\lim_{x \to b} U(x) = \ell'$.

b - Montrer que w réalise un homéomorphisme de I sur un intervalle J ouvert qui contient 0 et que l'on précisera en fonction de ℓ et de ℓ'.

c - Soit n un élément de $\mathbb{N}$ non nul, soit g une application de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en c. Montrer qu'il existe une application g_1 de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ telle que pour tout x élément de I, $g(x) = (x - c) \cdot g_1(x)$.

Indication : on pourra considérer $\int_0^1 g'(c + t(x - c))\, dt$.

d - Déduire du c - qu'il existe une application U_2 de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs strictement positives telle que $U(x) - U(c) = (x - c)^2 U_2(x)$ pour tout x élément de I . En déduire que w est de classe $\mathcal{C}^1$.

e - Soit l'application W : $I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (w(x), y)$

Montrer que W réalise un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $I \times \mathbb{R}$ sur $J \times \mathbb{R}$.

f - Soit k un élément de $\mathbb{R}$ tel que $U(c) < k < \min\{\ell, \ell'\}$. Montrer que $W(E_k)$ est un cercle que l'on déterminera.
(Les lignes de niveau de $\mathcal{E}$ sont difféomorphes à des cercles.)

- Étude d'un exemple :

Soit $\mathcal{M}$ un réel non nul.

Dans cette question on prend pour I, $\mathbb{R}^{*+}$ et U défini par $U(x) = -\frac{1}{x} + \frac{\mathcal{M}^2}{2x^2}$.

a - Montrer que U vérifie bien les hypothèses (1) et (2) . Dresser le tableau de variation de U et donner sa représentation graphique.

b - Représenter pour $k = -\frac{1}{4\mathcal{M}^2}$ l'ensemble E_k.

5 - Étude de solutions périodiques :

Soit k un réel tel que $U(c) < k < \min\{\ell, \ell'\}$.
Posons $\beta = \sqrt{2(k - U(c))}$ et considérons la solution φ de (E) définie sur IR qui satisfait : $\varphi(0) = c$ et $\varphi'(0) = \beta$.
(Nous allons maintenant exprimer le "temps" t comme fonction τ de la position x).

a - Montrer que pour tout t élément de IR, $\mathcal{E}(\varphi(t), \varphi'(t)) = k$. En déduire que $\varphi'(t)^2 = 2(k - U(\varphi(t))$.
Montrer qu'il existe un unique couple (x_m, x_M) d'éléments de I tel que
$x_m < c < x_M$ et $U(x_m) = U(x_M) = k$.

b - Montrer que l'application τ définie par $\tau(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(k - U(\xi))}}$ est définie sur $]x_m, x_M[$.
Montrer que τ admet une limite t_M (respectivement t_m) lorsque x tend vers x_M (respectivement x_m).

c - Montrer que τ réalise un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]x_m, x_M[$ sur $]t_m, t_M[$.
Montrer que τ^{-1} se prolonge en une application continue notée φ_1 de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t_m, t_M]$.

d - Soit enfin l'application $\tilde{\varphi}$ définie sur IR par : α - $\tilde{\varphi}$ coïncide avec φ_1 sur $[t_m, t_M]$.
β - $\tilde{\varphi}(t) = \varphi_1(2t_M - t)$ pour t élément de $[t_M, 2.t_M - t_m]$
γ - $\tilde{\varphi}$ est périodique de période $2(t_M - t_m)$.

Montrer que $\tilde{\varphi}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur IR et montrer enfin que $\tilde{\varphi} = \varphi$. En déduire que φ est périodique, exprimer la plus petite période strictement positive de φ au moyen d'une intégrale impropre convergente.

DEUXIÈME PARTIE : Champ de forces central

V désigne une application de IR^{+*} dans IR de classe $\mathcal{C}^3$, minorée.

1 - Soit $\mathcal{V}$ l'application de $IR^2 - \{(0, 0)\}$ dans IR définie par $\mathcal{V}(Z) = V(\|Z\|)$. Montrer que $\mathcal{V}$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $IR^2 - \{(0, 0)\}$, exprimer pour Z élément de IR^2 $\text{grad}\,\mathcal{V}(Z)$ grâce à V'.

2 - Soient X_0 et V_0 des éléments respectifs de $IR^2 - \{(0, 0)\}$ et de IR^2. On admet qu'il existe une unique application X de IR dans $IR^2 - \{(0, 0)\}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
$X''(t) = -\text{grad}\,\mathcal{V}(X(t))$ pour tout t élément de IR
et $X(0) = X_0$ et $X'(0) = V_0$
($t \mapsto X(t)$ décrit le mouvement, nécessairement plan, d'une particule soumise à un champ de forces radial $-\text{grad}\,\mathcal{V}$ dérivant du potentiel $\mathcal{V}$).

a - Montrer que l'application $\mathcal{H} : IR \to IR,\ t \mapsto \frac{1}{2}\|X'(t)\|^2 + \mathcal{V}(X(t))$ est constante sur IR *(Ceci traduit la conservation de la somme de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\|X'(t)\|^2$ et de l'énergie potentielle $\mathcal{V}(X(t))$).*

b - Montrer que l'application $\sigma : IR \to IR,\ t \mapsto \text{Det}(X(t), X'(t))$ est constante sur IR. On notera $\mathcal{M}$ cette constante. *(Ceci traduit la conservation du moment cinétique).*

3 - Passage en polaires

On admet l'existence d'une application r de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et d'une application θ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que pour tout réel t :

$$X(t) = (x(t), y(t)) = (r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\sin(\theta(t))).$$

a - Montrer que pour tout t élément de $\mathbb{R}$:

$$\theta'(t) = \frac{\mathcal{M}}{r(t)^2} \quad \text{et} \quad r''(t) = -V'(r(t)) + \frac{\mathcal{M}^2}{r(t)^3}$$

b - On désigne par U l'application : $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $s \mapsto V(s) + \frac{\mathcal{M}^2}{2.s^2}$.

Montrer que pour tout t élément de $\mathbb{R}$, $\frac{1}{2}.\, r'(t)^2 + U(r(t))$ est égal à la valeur constante de $\mathcal{R}$.

4 - On suppose de plus que U satisfait aux mêmes hypothèses que l'application U de la première partie. On pose $k = \frac{1}{2}\|V_0\|^2 + \mathcal{V}(X_0)$ et on suppose que k est strictement supérieur à U(c) et strictement inférieur à ℓ et ℓ' définis dans la question I-3-a.

a - Montrer que r est une application périodique. On note T sa plus petite période strictement positive.

b - On pose $r_m = \inf_{t\in\mathbb{R}}(r(t))$ et $r_M = \sup_{t\in\mathbb{R}}(r(t))$; montrer qu'il existe un élément t_m tel que $r(t_m) = r_m$. On pose $t_M = t_m + \frac{T}{2}$. Montrer que $r(t_M) = r_M$.

Prouver que $\theta(t_M) - \theta(t_m) = \mathcal{M}.\int_{r_m}^{r_M} \frac{d\xi}{\xi^2\sqrt{2(k - U(\xi))}}$

c - Donner une condition sur cette intégrale pour que l'application X soit périodique.

5 - Un exemple : le problème de Kepler. On prend $V(s) = -\frac{1}{s}$ et on suppose que $\mathrm{Det}(X_0, V_0) > 0$.

a - Montrer que U définie au II-3-b satisfait bien pour ce choix de V aux hypothèses de la première partie.

b - Comparer $\theta(t)$ à $\arccos\left(\frac{\frac{\mathcal{M}}{r(t)} - \frac{1}{\mathcal{M}}}{\sqrt{2k + \frac{1}{\mathcal{M}^2}}}\right)$.

c - En déduire que dans ce cas et pour k strictement négatif et strictement supérieur à U(c), X(t) décrit une ellipse lorsque t décrit $\mathbb{R}$. Préciser le foyer, le paramètre et l'excentricité de cette ellipse.